Cuadernos de COU y
Selectividad

FISICA

5

Trabajo y energía

J. J. LOZANO LUCEA y J. L. VIGATÁ CAMPO

Alhambra Longman

Cuadernos de COU y
Selectividad

J. J. Lozano Lucea
J. L. Vigatá Campo

5

Trabajo y energía

FÍSICA

Alhambra Longman

Producción editorial:
Dirección: José Luis Ferrer
Coordinación: Óscar García
Diseño: Gentil Andrade

ISBN 84-205-2126-4

Depósito legal: M. 20.870-1992

Impreso en España - Printed in Spain

Gráficas Rógar, S. A. - León, 44. Pol. Ind. Cobo Calleja - Fuenlabrada (Madrid)

Contenido

Recordatorio

Trabajo

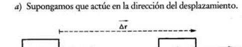
Una forma cualitativa de definir el trabajo puede ser: *Trabajo* es una medida de la cantidad de energía que se transfiere a un cuerpo en un proceso físico en el que actúa una fuerza sobre el cuerpo y se produce un desplazamiento del mismo.

Otra forma de transferir la energía de un cuerpo a otro se produce como consecuencia de que los dos cuerpos estén en contacto y exista entre ambos un desnivel térmico. El cuerpo caliente transfiere energía al cuerpo frío en forma de calor hasta alcanzar el equilibrio térmico.

Veremos en primer lugar algunos casos particulares de determinación del trabajo realizado por una o más fuerzas que actúan sobre un cuerpo, y después generalizaremos.

Trabajo efectuado por una fuerza $\vec{F}$ constante

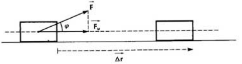
a) Supongamos que actúe en la dirección del desplazamiento.



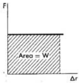
Definimos el trabajo como el producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento.

$$W = \vec{F}\vec{\Delta r}$$

b) Si la fuerza $\vec{F}$ no actúa en la dirección del movimiento.



Definimos el trabajo como el producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento.



$$W = \vec{F}\vec{\Delta r} = \vec{F}\vec{\Delta r} \cdot \cos(\vec{F}, \vec{r})$$

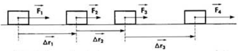
$$W = |\vec{F}|\ |\vec{\Delta r}| \cos \varphi$$

$$W = F_u \cdot \Delta r$$

Siendo F_u la fuerza útil, $F_u = F \cos \varphi$

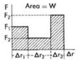
Trabajo efectuado por una fuerza variable

a) Supongamos la trayectoria dividida en tramos, en cada uno de los cuales la fuerza aplicada al cuerpo actúa en la dirección del desplazamiento y permanece constante.



El trabajo puede calcularse como

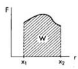
$$W = \vec{F_1}\vec{\Delta r_1} + \vec{F_2}\vec{\Delta r_2} + \vec{F_3}\vec{\Delta r_3} + \ldots$$



b) Cuando la fuerza aplicada es variable a lo largo de la trayectoria y actúa en la dirección del desplazamiento.

En un desplazamiento elemental, dx, en el que F es constante el trabajo valdrá

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = \vec{F_x} \cdot \vec{dx}$$

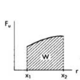


y para un desplazamiento entre los puntos x_1 y x_2 valdrá

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F_x} \cdot \vec{dx}$$

c) Cuando la fuerza aplicada es variable y no actúa en la dirección del desplazamiento, el trabajo valdrá

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = F \cdot dr \cdot \cos \varphi$$

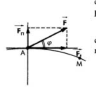


y para un desplazamiento entre x_1 y x_2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{x_1}^{x_2} F \cos \varphi \; dx = \int_{x_1}^{x_2} F_u \cdot dx$$

Trabajo efectuado por varias fuerzas que actúen simultáneamente sobre un cuerpo

Supongamos ahora que sobre un cuerpo de masa, m, actúe un conjunto de fuerzas concurrentes y que el cuerpo sufra un desplazamiento, dr, a lo largo de una trayectoria AM.



El conjunto de fuerzas tiene una resultante, $\vec{F}$, y podemos considerar esta fuerza, $\vec{F}$, descompuesta en dos: una $\vec{F_t}$ (componente tangencial), y otra $\vec{F_n}$ (componente normal).

Definiremos trabajo como

$$W = \int_{A}^{M} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{A}^{M} \vec{F} \cdot \vec{dr} \cdot \cos \varphi = \int_{A}^{M} \vec{F_t} \cdot \vec{dr}$$

El trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F_n}$ es nulo porque en este caso $\cos \varphi = 0$.

Generalizando para todos los casos, el trabajo puede definirse como *la circulación del vector $\vec{F}$, a lo largo de la trayectoria de la partícula*.

$$W = \oint_{AM} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

La ecuación dimensional del trabajo es

$$[W] = [F \cdot r] = [MLT^{-2} \cdot L] = ML^2T^{-2}$$

Su unidad de medida en el SI es el Julio.

Otras unidades:

Sistema cgs	1 ergio = 10^{-7} J
Sistema técnico	1 Kpm = 9,8 J

También se utiliza el Kw · h = 3.600.000 J

Potencia

En algunos casos interesa conocer la rapidez con que una máquina realiza un determinado trabajo; es por lo que se define una magnitud llamada *potencia*, P, como el trabajo realizado en la unidad de tiempo.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

La potencia instantánea de un móvil cabe expresarla como

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot v$$

Esta expresión, en el caso de que el móvil se mueva con velocidad constante, nos da el valor de la potencia media.

La ecuación dimensional de la potencia será

$$[P] = \frac{ML^2\,T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}$$

Las unidades de medida más utilizadas son:

En el SI ________ el watio
En el S.c.g.s. ______ el ergio/s
En el S. técnico ____ el Kpm/s

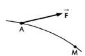
Otras son:

Kw = 1.000 W

HP = 746 W

CV = 735 W

Relaciones entre el trabajo y la energía cinética



Sea una partícula material de masa, m, que se mueve a lo largo de una trayectoria AM, sometida a la acción de una fuerza $\vec{F}$, que puede ser la resultante de un sistema de fuerzas que actúe sobre el cuerpo.

Esta fuerza $\vec{F}$ producirá dos efectos:

a) Un trabajo, de valor

$$W = \int_A^M \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

b) Una variación del momento lineal del cuerpo, de la que se deduce que

$$\vec{F} = m \cdot \frac{\vec{dv}}{dt}$$

por tanto, sustituyendo se cumplirá

$$W = \int_A^M \left(m \cdot \frac{\vec{dv}}{dt}\right) \cdot \vec{dr} = \int_A^M mv \cdot dv = \left(\frac{1}{2}\right) m \int_A^M d(v^2)$$

$$W = \frac{1}{2}\, m \cdot v_M{}^2 - \frac{1}{2}\, m \cdot v_A{}^2$$

en donde $\frac{1}{2}\, mv^2$ es la energía cinética del cuerpo, que, como puede observarse, tiene las dimensiones del trabajo y se mide en unidades de trabajo.

$$W = \Delta E_c$$

El trabajo efectuado sobre el cuerpo en la trayectoria AM, viene medido como la variación de su energía cinética entre los puntos A y M (teorema de las fuerzas vivas).

Si ahora queremos aplicar este resultado a un sistema de partículas habrá que tener en cuenta que:

- En un sistema de partículas existen o pueden existir fuerzas internas que se ejercen entre las partículas del sistema.
- Pueden existir fuerzas que actúen desde el exterior sobre el sistema de partículas.

Respecto a las fuerzas internas, el principio de acción y reacción nos dice que $\Sigma\overrightarrow{F_{int}} = 0$, lo cual no significa que el trabajo desarrollado por estas fuerzas tenga que ser nulo, pues las distancias entre partículas pueden variar. Ahora bien, si las distancias relativas entre las partículas permanecen constantes, entonces puede afirmarse que

$$W_{\text{fuerzas internas}} = 0$$

Por lo tanto, como para cualquier sistema

$$W = W_{\text{fuerzas internas}} + W_{\text{fuerzas externas}} = \Delta E_c$$

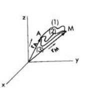
para un sistema de partículas que cumpla la anterior condición podemos afirmar que

$$W_{\text{fuerzas externas}} = \Delta E_c$$

De este resultado cabe deducir lo siguiente: Si sobre un sistema de partículas que conservan sus posiciones relativas no actúa ninguna fuerza externa (está aislado del exterior) o bien la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo es cero, el trabajo de las fuerzas es nulo y la energía cinética del sistema permanece constante.

Fuerzas conservativas

Denominamos *fuerzas conservativas* a las fuerzas que cumplen la condición de que el trabajo efectuado por estas fuerzas para mover una partícula de un punto a otro es independiente de la trayectoria seguida.



$$W_1 = \int_A^M \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} \text{ por el camino (1)}$$

$$W_2 = \int_A^M \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} \text{ por el camino (2)}$$

$$W_3 = \int_A^M \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} \text{ por el camino (3)}$$

Si F es una fuerza conservativa se cumple

$$W_1 = W_2 = W_3$$

Por lo tanto, si calculamos el trabajo para ir de A hasta M por un camino y volver de M hasta A por otro camino (describimos un ciclo cerrado), veremos que el trabajo será nulo.

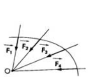
$$W_{\text{ciclo}} = \oint \vec{\mathbf{F}}\vec{\mathbf{dr}} = 0$$

Son ejemplos de fuerzas conservativas:

a) *Las fuerzas elásticas*

$$F(r) = -Kr$$

b) *Las fuerzas centrales*



Son fuerzas cuya dirección pasa siempre por un punto fijo. Son casos particulares:

- *Las fuerzas gravitatorias*

$$F(r) = -G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

- *Las fuerzas eléctricas entre cargas*

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Energía potencial

Si existen fuerzas conservativas puede definirse la energía potencial.

Supongamos que existan fuerzas conservativas. Como el trabajo para trasladar una partícula sometida a la acción de una fuerza conservativa $\vec{F}$, de un punto A a otro punto M, no depende del camino seguido y sólo depende de las posiciones del punto de partida y del punto de llegada, a cada punto del sistema se le puede asignar una magnitud escalar $U\ (x, y, z)$, que será función de la posición del punto, a la que llamaremos *energía potencial*, y que será tal, que su variación entre dos puntos cualesquiera del sistema sea igual a menos el trabajo necesario para ir de un punto al otro.

$$W = \int_A^M \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = -(E_{pM} - E_{pA}) = -\Delta E_p$$

Para calcular el valor de la energía potencial en un punto determinado, deberemos tomar la energía potencial de un punto de referencia como igual a cero, y a partir de esta referencia podremos calcular el valor de la energía potencial en el punto considerado.

Conservación de la energía mecánica de un sistema

Sabemos que el trabajo realizado sobre una partícula por la acción de fuerzas externas cumple

$$W_{ext} = \Delta E_c$$

Vamos a considerar dos casos:

Trabajo producido simultáneamente por fuerzas conservativas y no conservativas

Si el trabajo lo consideramos producido simultáneamente por fuerzas conservativas y no conservativas, podremos decir que

$$W_{ext} = W_c + W_{nc}$$

y, por tanto,

$$W_c + W_{nc} = \Delta E_c$$

Si además tenemos en cuenta que

$$W_c = -\Delta E_p$$

tendremos

$$-\Delta E_p + W_{nc} = \Delta E_c$$

por tanto,

$$W_{nc} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

y como

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_{\text{mecánica}} = \Delta E_m$$

nos quedaría

$$W_{nc} = \Delta E_m$$

Esta conclusión final nos permite afirmar que la variación de la energía mecánica en estas condiciones es una medida del trabajo producido por las fuerzas no conservativas.

Sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas

Si se da esta circunstancia

$$W_{nc} = 0 \Rightarrow \Delta E_m = 0 \Rightarrow E_m = \text{constante}$$

la energía mecánica del sistema permanece constante. Además se cumplirá que, al ser $W_{nc} = 0$ (no hay fuerzas no conservativas)

$$\Delta E_m = \Delta E_c + E_p = 0$$

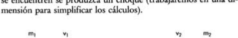
y en consecuencia

$$W_c = -\Delta E_p = \Delta E_c$$

lo que permite afirmar que en el caso de que $W_{nc} = 0$, *la energía mecánica no se crea ni se destruye, sólo se transforma*, en este caso de cinética en potencial o de potencial en cinética.

Teoría del choque entre partículas

Supongamos dos partículas de masas m_1 y m_2, moviéndose a velocidades respectivas constantes v_1 y v_2, de modo que cuando se encuentren se produzca un choque (trabajaremos en una dimensión para simplificar los cálculos).



a) Analicemos en primer lugar cómo se comporta en los choques el sistema estudiado con respecto a la cantidad de movimiento.

En el instante del choque cada partícula comunicará un impulso ($\vec{F} \cdot dt$) a la otra. Por otra parte, el impulso que comunican las fuerzas externas es nulo, porque en el instante del choque la suma de las fuerzas externas es nula

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} \cdot dt = 0$$

Por tanto, la cantidad de movimiento total del sistema, formado por las dos partículas que chocan, permanece constante:

$$\Delta\vec{p} = \overrightarrow{p_{antes}} - \overrightarrow{p_{después}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{p_{ant}} = \overrightarrow{p_{desp}}$$

y si tenemos en cuenta que

$$\overrightarrow{p_{ant}} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}$$

$$\overrightarrow{p_{desp}} = m_1\overrightarrow{v_1'} + m_2\overrightarrow{v_2'}$$

y tomamos los vectores dirigidos hacia la derecha como positivos y los dirigidos hacia la izquierda como negativos, podremos escribir

$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

A v_1' y a v_2' las consideramos arbitrariamente como positivas (dirigidas hacia la derecha), y si al resolver las ecuaciones sus valores resultan ser negativos, se deberán tomar en sentido opuesto..

b) Consideremos ahora cómo se comporta en los choques el sistema estudiado con respecto a la energía mecánica total.

Pueden observarse dos casos claramente diferenciados:

Choque elástico

En él no actúan fuerzas no conservativas y se cumple el principio de conservación de la energía, de modo que

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

$$(E_{c\ ant} - E_{c\ des}) = -(E_{p\ ant} - E_{p\ des})$$

Se conservan, por tanto, la cantidad de movimiento y la energía mecánica total.

Choque inelástico

En él actúan fuerzas no conservativas (fuerzas disipativas) y no se cumple el principio de conservación de la energía mecánica, ya que se ha producido una pérdida de trabajo en el proceso de deformación del sistema. Por lo tanto,

$$\Delta E_c \neq - \Delta E_p$$

$$(E_{c\ ant} - E_{c\ des}) \neq - (E_{p\ ant} - E_{p\ des})$$

y no podremos plantear la ecuación de conservación de la energía mecánica, aunque seguirá conservándose la cantidad de movimiento del sistema.

En el caso del choque perfectamente elástico, la conservación de la cantidad de movimiento podemos formularla como

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + m_1\overrightarrow{v_1'} + m_2\overrightarrow{v_2'}$$

que puede escribirse

$$m_1 (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v'_1}) = -m_2 (\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v'_2}) \qquad (1)$$

y la conservación de la energía mecánica la expresamos como

$$(1/2)m_1v_1^2 + (1/2)m_2v_2^2 = (1/2)m_1v_1'^2 + (1/2)m_2v_2'^2 \qquad (2)$$

Esta segunda ecuación (2) podemos combinarla con la primera (1) y obtener una ecuación de más cómodo manejo. Si simplificamos y trasladamos términos

$$m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = m_2 (v_2^2 - v'^2_2)$$

y dividiendo ahora por la ecuación (1) en su forma escalar

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (3) podremos determinar los valores de v_1' y v_2' conocidos los de m_1, m_2, v_1 y v_2.

Si el choque es perfectamente inelástico, los móviles viajarán juntos a partir del momento del choque con una velocidad común v, y la conservación de la cantidad de movimiento podremos formularla como

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)\, v$$

Podemos analizar los choques haciendo uso del concepto de coeficiente de restitución K, que se define como

$$K = \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

El valor de K es tal que

$$0 \leq K \leq 1$$

Si el choque es perfectamente elástico,

$$K = 1$$

Si el choque es perfectamente inelástico,

$$K = 0$$

y en este caso $v_1' = v_2' = v$ (los dos cuerpos salen juntos). Y si el choque no es ni perfectamente elástico ni perfectamente inelástico,

$$0 < K < 1$$

y entonces

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' - m_2 v_2'$$

y

$$K = \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

Por consiguiente, si podemos conocer el valor de K, podremos hallar los valores de v_1' y v_2'.

Cuestiones

1. Si ejercemos sobre un cuerpo una fuerza constante, es posible realizar un trabajo sin aumentar su energía cinética. V F
2. El trabajo realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos depende de la trayectoria seguida para ir de un punto al otro. V F
3. Si mantenemos tenso un resorte atado a la pared, estamos realizando un trabajo. V F
4. Para cada tipo de fuerza somos capaces de definir una energía potencial. V F
5. Cuando una partícula describe una circunferencia cerrada sometida a la acción de una fuerza conservativa, el trabajo total realizado es nulo. V F
6. La energía cinética de un cuerpo puede ser negativa en algún caso. V F
7. Si una partícula describe un movimiento circular con velocidad angular constante, no se realiza trabajo. V F
8. Una pelota se deja botar sobre un suelo horizontal y al cabo de cierto tiempo se para. Esto es un ejemplo de que el principio de conservación de la energía puede fallar. V F
9. El Kw · h es una unidad de potencia. V F
10. La potencia instantánea de una máquina puede expresarse como $P = Fv$. V F
11. Las fuerzas internas de un sistema son capaces de realizar un trabajo útil. V F
12. La energía potencial gravitatoria de un cuerpo que se mueva hacia la Tierra disminuye. V F
13. Las fuerzas elásticas recuperadoras son conservativas; por tanto, la fuerza que realizamos con las piernas al saltar es conservativa. V F

14. El trabajo realizado por una fuerza constante es máximo si la fuerza actúa en la dirección del desplazamiento. V F

15. La energía potencial creada por una fuerza conservativa es siempre negativa. V F

16. Para sistemas no aislados la variación de la energía mecánica es igual al trabajo realizado sobre el sistema por acción de las fuerzas externas. V F

17. En un sistema aislado de fuerzas exteriores la energía mecánica no tiene que permanecer constante. V F

18. El coeficiente de restitución en un choque tiene un valor que está comprendido entre 0 y 1, siendo cero para un choque elástico perfecto. V F

19. En un choque perfectamente inelástico, el momento lineal antes y después del choque es el mismo. V F

20. En cualquier choque perfectamente inelástico se pierde toda la energía cinética de las partículas. V F

21. En el péndulo balístico, que se utiliza para determinar la velocidad de un proyectil, se produce un choque perfectamente inelástico, y las masas que chocan toman la misma velocidad tras el choque. V F

Soluciones a las cuestiones propuestas

1	V	8	F	15	F
2	F	9	F	16	V
3	F	10	V	17	F
4	F	11	V	18	F
5	V	12	V	19	V
6	F	13	F	20	F
7	V	14	V	21	V

Ejercicios resueltos

En todos los casos suponemos constante el valor de g. Salvo indicación en contra, también suponemos todos los móviles como puntuales.

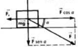
1. Sobre una masa de 40 kg actúa una fuerza constante de 80 N formando un ángulo de 30° con la horizontal, y dirigida hacia el terreno. A consecuencia de tal fuerza, la masa toma una velocidad constante a lo largo de 20 m. Calcular:

a) Trabajo total efectuado sobre la masa.

b) Trabajo útil que efectúa la fuerza.

c) Trabajo de rozamiento.

Resolución



Hagamos un esquema y veamos qué fuerzas actúan.

En dirección perpendicular al terreno $\Sigma\vec{F} = 0$, y por tanto

$$N = F \text{ sen } \alpha + mg$$

La fuerza resultante en la dirección del movimiento valdrá

$$F_{\text{total}} = F \cos \alpha - F_r = F \cos \alpha - \mu\,(mg + F \text{ sen } \alpha)$$

a) Como en este caso

$$v = \text{cte.} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow F_t = 0$$

y

$$W_t = F_t r = 0$$

b) El trabajo útil es el realizado por la fuerza $F \cos \alpha$.

$$\mathbf{W}_{\text{útil}} = (F \cos \alpha)\, r = 80 \cdot 0{,}866\ N \cdot 20\ m = \mathbf{1.385{,}6\ J}$$

c) Para calcular el trabajo de rozamiento necesitamos conocer el coeficiente de rozamiento μ, y teniendo en cuenta que al ser la aceleración nula

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

tendremos

$$F \cos \alpha - \mu (F \text{ sen } \alpha + mg) = 0$$

$$\mu = \frac{F \cos \alpha}{F \text{ sen } \alpha + mg} = \frac{80 \cdot 0{,}866\ N}{(80 \cdot 0{,}5 + 40 \cdot 9{,}8)\ N} = 0{,}1603$$

y así

$$W_{roz} = [-\mu (F \text{ sen } \alpha + mg)]\ r =$$
$$= [-0{,}1603\ (40 + 40 \cdot 9{,}8)]\ N \cdot 20\ m$$

$$\mathbf{W_{roz} = -1.385{,}6\ J}$$

2. Subimos un cuerpo de 20 kg por un plano inclinado de 30°, mediante una fuerza, *F*, paralela al plano que tiene una longitud de 10 m, con velocidad constante de 2 m/s. En el supuesto de que el coeficiente de rozamiento sea 0,2, calcular:

a) Valor de la fuerza *F*.

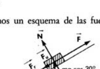
b) Trabajo total realizado sobre el cuerpo.

c) Trabajo útil y trabajo de rozamiento.

d) Potencia necesaria para hacer ascender el cuerpo con velocidad constante.

Resolución

Hagamos un esquema de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:



$|\vec{N}| = mg \cos 30°$

$|\vec{F_u}| = mg \text{ sen } 30°$

$|\vec{F_r}| = \mu\ mg \cos 30°$

a) Para calcular $\vec{F}$ tengamos en cuenta que si el cuerpo sube a velocidad constante eso significa que

$$a = 0 \Rightarrow \Sigma\vec{F} = 0$$

Al sumar las fuerzas paralelas al plano inclinado, como son de la misma dirección, tendremos

$$F - (mg \text{ sen } \alpha + \mu mg \cos \alpha) = 0$$

así pues,

$$F = mg \text{ sen } \alpha + \mu mg \cos \alpha$$

$$F = 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}866$$

$$\mathbf{F = 131{,}9 \text{ N}}$$

b) El trabajo total realizado será nulo, ya que $\Sigma\vec{F} = 0$.

c) El trabajo útil será el realizado por las fuerzas que no son de rozamiento:

$$W_{\text{útil}} = (F - mg \text{ sen } \alpha) \cdot r$$

$$W_{\text{útil}} = (131{,}9 \text{ N} - 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}5) \cdot 10 \text{ m}$$

$$\mathbf{W_{\text{útil}} = 339{,}47 \text{ J}}$$

y el de rozamiento, que será negativo al tener la fuerza de rozamiento sentido opuesto al del movimiento:

$$W_{\text{roz}} = F_{\text{roz}} \cdot r = (-\mu\, mg \cos \alpha) \cdot r$$

$$\mathbf{W_{\text{roz}}} = (-0{,}2 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}866) \cdot 10 \text{ m} = \mathbf{-339{,}47 \text{ J}}$$

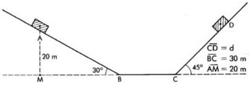
d) Para calcular la potencia necesaria tendremos en cuenta que el cuerpo se desplaza con velocidad constante, y por tanto

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot r}{t} = F \cdot v = 131{,}9 \text{ N} \cdot 2 \text{ m/s} = \mathbf{268{,}8 \text{ W}}$$

3. Desde el punto *A* de la figura se suelta un cuerpo de 50 kg de masa, que desciende deslizándose por la rampa de 30°, se desplaza por el plano horizontal de 30 m de longitud y asciende después por la rampa de 45°. Calcular:

a) Longitud, *d*, que recorre el cuerpo por el plano inclinado de 45° si no existen rozamientos.

b) Altura a la que ascendería si el coeficiente de rozamiento a lo largo del recorrido fuese de 0,25.



Resolución

a) Hagamos un balance de energías tomando como nivel de referencia para las energías potenciales el correspondiente a *BC*.

En el punto *A* el cuerpo sólo tiene energía potencial de valor

$$E_{pA} = m \cdot g \cdot h = 50 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m} = 9.800 \text{ J}$$

y

$$E_{cA} = 0 \Rightarrow E_m = 9.800 \text{ J}$$

Al llegar al punto *B*, toda la energía potencial se ha convertido en cinética y se cumplirá

$$E_{cB} = (1/2)\, m v_B^2$$

y

$$E_{pB} = 0 \Rightarrow E_m = E_{cB}$$

En el punto C se cumplirá

$$E_{cC} = \left(\frac{1}{2}\right) m \cdot v_c^2 = \left(\frac{1}{2}\right) m \cdot v_B^2$$

y

$$E_{pC} = 0 \Rightarrow E_{mC} = \left(\frac{1}{2}\right) m \cdot v_B^2$$

En el punto D, al haberse producido una nueva variación de altura y teniendo en cuenta que al llegar al punto D el cuerpo se para ($v_D = 0$), tenemos

$$E_{cD} = 0$$

$$E_{pD} = m \cdot g \cdot h_D \Rightarrow E_{mD} = mgh_D$$

Si además tenemos en cuenta que la energía mecánica es la misma en todos los puntos, pues debe conservarse, al no existir fuerzas disipativas, se cumplirá

$$E_{mA} = E_{mD}$$

$$9.800 \text{ J} = mgh_D$$

$$h_D = \frac{9.800 \text{ J}}{50 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 20 \text{ m}$$

y como vemos que

$$h_D = d \cos 45°$$

tendremos

$$\boldsymbol{d = 28{,}28 \text{ m}}$$

b) En el caso de existir rozamientos, el balance energético debe realizarse teniendo en cuenta que una parte de la energía se transforma en trabajo de rozamiento.

En el recorrido desde el punto A al punto B,

$$E_{pA} = m \cdot g \cdot h_A = E_{cB} + W_{roz}$$

$$m \cdot g\, h_A = \left(\frac{1}{2}\right) m v_B^2 + (\mu m g \cos 30°) \cdot r_{AB}$$

simplificando y sustituyendo datos,

$$9{,}8 \cdot 20 \text{ J} = 0{,}25 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 40 \text{ m} \cdot 0{,}866 + \left(\frac{1}{2}\right) v_B^2$$

$$v_B = 14{,}9 \text{ m/s}$$

En el paso de B hasta C se cumple

$$E_{mB} = E_{mC} + W_{roz\ BC}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) m \cdot v_B^2 = E_{cC} + (\mu m \cdot g) \cdot r_{BC}$$

simplificando y sustituyendo datos,

$$E_{cC} = \left(\frac{1}{2}\right) 50 \text{ kg} \cdot 14{,}9^2 \text{ (m/s)}^2 - 0{,}25 \cdot 50 \cdot 9{,}8 \cdot 30 \text{ J}$$

$$E_{cC} = 1.875{,}25 \text{ J}$$

Y en el recorrido desde C hasta el punto D,

$$E_{mC} = E_{pD} + W_{roz\ CD}$$

$$1.875{,}25 \text{ J} = m \cdot g \cdot h_D + \mu m \cdot g \cdot \cos 45° \cdot d'$$

siendo

$$d' = \frac{h_D}{\cos 45°}$$

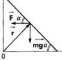
sustituyendo y operando, hallaremos h_D,

$$1.875{,}25 \text{ J} = 50 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot h_D + 0{,}25 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot h_D$$

$$\boldsymbol{h_D = 3{,}06 \text{ m}}$$

4. Una barra homogénea de 40 kg de masa y de 8 m de longitud está apoyada en una pared formando un ángulo de 45 ° con la horizontal, que es un suelo resbaladizo sin rozamiento al deslizamiento. En el punto medio de la barra se aplica una fuerza horizontal de 300 N. Calcular el trabajo realizado por la fuerza de 300 N y por la fuerza peso, para trasladar la escalera desde su posición a la posición vertical.

Resolución



Hagamos un esquema. El vector de posición del punto donde está aplicada la fuerza $\vec{F}$ es, tomando el origen de los ejes coordenados en el punto 0,

$$\vec{r} = 4 \cos \alpha \, \vec{i} + 4 \,\text{sen}\, \alpha \, \vec{j}$$

Para este vector el ángulo α es variable con el tiempo, desde el valor de 45° hasta un valor de 90°, y por tanto el punto en que está aplicada la fuerza describe un arco, cuyo valor en un tiempo infinitesimal será

$$\overrightarrow{dr} = (-4 \,\text{sen}\, \alpha \, \vec{i} + 4 \cos \alpha \, \vec{j}) \, d\alpha$$

y la fuerza en cada instante valdrá

$$\vec{F} = -300 \, \vec{i}$$

Así pues, el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ para llevar la escalera a la posición vertical valdrá

$$W = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-300 \, \vec{i}) \cdot (-4 \,\text{sen}\, \alpha \, \vec{i} + 4\cos \alpha \, \vec{j}) \cdot d\alpha$$

$$W = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1.200 \,\text{sen}\, \alpha \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} - 1.200 \cos \alpha \, \vec{i} \cdot \vec{j}) \cdot d\alpha$$

$$W = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1.200 \,\text{sen}\, \alpha) \cdot d\alpha = 1.200 \Big[-\cos \alpha\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$\mathbf{W = 848{,}5 \ J}$$

Por otra parte, para el vector peso se cumple que

$$\vec{P} = -mg\,\vec{j}$$

El trabajo realizado por esta fuerza al mover la escalera será

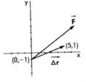
$$W = \int \vec{P} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-mg\,\vec{j}) \cdot (-4 \text{ sen } \alpha\,\vec{i} + 4 \cos \alpha\,\vec{j}) \cdot d\alpha$$

$$W = \int_{\pi/4}^{\pi/2} [(4\,mg \text{ sen } \alpha\,\vec{j} \cdot \vec{i}) - (4\,mg \cos \alpha\,\vec{j} \cdot \vec{j})] \cdot d\alpha$$

$$W = -4mg \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \alpha\, d\alpha = -4mg \Big[\text{sen } \alpha\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \mathbf{-459{,}25\ J}$$

5. Un cuerpo de 60 kg de masa se ve sometido a la acción de una fuerza constante de valor $\vec{F} = (8\vec{i} + 6\vec{j})$ N, y el cuerpo se traslada en línea recta desde el punto $(0,-1)$ al punto $(5,1)$. Calcular el trabajo realizado en este desplazamiento y el ángulo que forman la fuerza y el vector desplazamiento.

Resolución



Veamos un gráfico del problema propuesto.

$$\overrightarrow{\Delta r} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} = 5\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

El trabajo se calculará como sigue:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \vec{F} \int_1^2 \overrightarrow{dr} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = (8\vec{i} + 6\vec{j})\,(5\vec{i} + 2\vec{j}) \quad \text{(SI)}$$

$$W = (40 + 12)\ \text{J} = \mathbf{52\ J}$$

El ángulo podemos hallarlo a partir de la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r}}{|\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{\Delta r}|} = \frac{F_x \cdot r_x + F_y \cdot r_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \cdot \sqrt{r_x^2 + r_y^2}} =$$

$$= \frac{8 \cdot 5 + 6 \cdot 2}{\sqrt{8^2 + 6^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2}} = 0{,}9656$$

de donde

$$\alpha = 15°4'19''$$

6. Un cuerpo de 20 kg de masa está sometido a la acción de la fuerza

$$\vec{F} = (4t^3 - 8t)\,\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

tomando un movimiento sobre el eje OY, que cumple la ecuación

$$\vec{r} = (t^2 - 3)\,\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$, al desplazarse el cuerpo desde $y = 6$ m hasta $y = 13$ m.

Resolución

Sabemos que

$$W = \int_{r_0}^{r} \vec{F}\,\vec{dr} = \int_{r_0}^{r} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

y como el desplazamiento sólo se produce en el eje OY

$$W = \int_{r_0}^{r} (F_y dy)$$

expresando ambos valores en función de t,

$$\vec{F_y} = (4t^3 - 8t)\,\vec{j}$$

$$y = t^2 - 3$$

$$dy = 2t\,dt$$

para

$$y = 6 \text{ m} \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

y para

$$y = 13 \text{ m} \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

efectuando el cambio de variable y sustituyendo,

$$W = \int_3^4 (4t^3 - 8t)\, 2tdt = \int_3^4 (8t^4 - 16t^2)\, dt$$

$$W = \left[\frac{8t^5}{5} - \frac{16t^3}{3}\right]_3^4 \text{J} = 1.297{,}1 \text{ J} - 244{,}8 \text{ J} = \mathbf{1.052{,}3 \text{ J}}$$

7. Una partícula de 20 kg de masa se desplaza sometida a una fuerza variable tal que

$$\vec{F} = 5y\,\vec{i} + (z - x)\,\vec{j} + (2z^2 - x)\,\vec{k} \qquad \text{(SI)}$$

siguiendo la trayectoria definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = 3t \qquad \text{(SI)}$$
$$y = 2t^2 \qquad \text{(SI)}$$
$$z = t - 2 \qquad \text{(SI)}$$

¿Cuál será el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$, entre los instantes $t = 0$ s y $t = 4$ s?

Resolución

El trabajo lo calcularemos hallando

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \vec{F}\,\vec{dr} = \int_{r_0}^{r_1} F_x dx + \int_{r_0}^{r_1} F_y dy + \int_{r_0}^{r_1} F_z dz$$

Para poder calcular estas integrales nos hace falta calcular dx, dy, dz, y teniendo en cuenta las ecuaciones paramétricas,

$$x = 3t \quad \Rightarrow dx = 3\,dt$$
$$y = 2t^2 \quad \Rightarrow dy = 4t\,dt$$
$$z = t - 2 \Rightarrow dz = dt$$

Sustituyendo los valores de $\vec{F}$ y de $\vec{dr}$ tendremos, al cambiar de variable,

$$W = \int_0^4 5\,(2t^2) \cdot 3dt + \int_0^4 [(t-2) - (3t)] \cdot 4tdt + \\ + \int_0^4 [2\,(t-2)^2 - 3t]\,dt$$

haciendo operaciones,

$$W = 30 \int_0^4 t^2 dt + \int_0^4 (-8t^2 - 8t)\,dt + \\ + \int_0^4 [(2t^2 - 8t + 4) - 3t]\,dt$$

integrando,

$$W = 30 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^4 + \left[-\frac{8t^3}{3} - \frac{8t^2}{2}\right]_0^4 + \\ + \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{11t^2}{2} + 4t\right]_0^4$$

dando valores,

$$\mathbf{W} = (640 - 234{,}66 + 29{,}33)\ \mathrm{J} = \mathbf{376\ J}$$

8. Una partícula material de 2 kg de masa se halla sometida a la acción de una fuerza, $\vec{F}$, constante. Su posición nos viene dada en cada instante por las ecuaciones paramétricas

$$x = 3t^2 \qquad \text{(SI)}$$

$$y = t^2 - 2t + 5 \qquad \text{(SI)}$$

$$z = t - 4 \qquad \text{(SI)}$$

Calcular el trabajo desarrollado por la fuerza $\vec{F}$, al cambiar la posición de la partícula entre los instantes $t = 0$ s y $t = 4$ s.

Resolución

Calcularemos primero el valor de la fuerza a que se ve sometida la partícula material; para ello hallaremos la aceleración y aplicaremos después,

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

En nuestro caso

$$\vec{r} = (3t^2)\,\vec{i} + (t^2 - 2t + 5)\,\vec{j} + (t - 4)\,\vec{k} \qquad \text{(SI)}$$

y como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\,\vec{i} + (2t - 2)\,\vec{j} + (1)\,\vec{k} \qquad \text{(SI)}$$

y también se cumple que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

ahora podremos hallar la fuerza

$$\vec{F} = 2\ \text{kg} \cdot (6\vec{i} + 2\vec{j})\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{F} = (12\vec{i} + 4\vec{j})\ \text{N}$$

Para determinar el trabajo debemos calcular antes el valor de $\vec{dr}$

$$\vec{dr} = (6t\,\vec{i} + (2t - 2)\,\vec{j} + \vec{k})\,dt$$

por tanto, el trabajo efectuado valdrá

$$W = \int_0^4 \vec{F}\,\vec{dr} = \int_0^4 (12\vec{i} + 4\vec{j})\,[6t\,\vec{i} + (2t - 2)\,\vec{j} + \vec{k}]\,dt$$

$$W = \int_0^4 [72 + 4\,(2t - 2)]\,dt = \Big[72t + 4t^2 - 8t\Big]_0^4 = \mathbf{320\ J}$$

9. Hallar la potencia que desarrolla el motor de un trineo de 2.000 kg de masa sabiendo que marcha deslizándose a 54 km/h, en los siguientes casos:

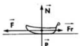
a) Por una carretera horizontal.

b) Cuando sube una cuesta con un desnivel del 7 por 100.

c) Cuando baja por la misma cuesta del apartado *b*.

(Suponer un coeficiente de rozamiento de 0,1.)

Resolución



a) Hagamos un esquema de las fuerzas que actúan en el plano horizontal sobre el trineo.

Para calcular la resultante, vemos que en el plano vertical las fuerzas se anulan, y que en el horizontal, como consecuencia de que el móvil viaja con velocidad constante, la aceleración es nula; así pues,

$$F - \mu mg = m \cdot a = 0$$

sustituyendo valores,

$$F = \mu \, mg = 0{,}1 \cdot 2.000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F = 1960 \text{ N}$$

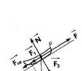
La velocidad del trineo, constante, es

$$v = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$$

y en tal caso

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fr}{t} = Fv = 1960 \text{ N} \cdot 15 \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{P = 29400 \text{ W}}$$



b) Hagamos un esquema de las fuerzas que actúan en este caso.

En dirección paralela al plano, se cumple

$$F - F_1 - F_{roz} = F - mg \text{ sen } \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma$$

y como

$$ma = 0$$

$$F = mg \text{ sen } \alpha + \mu mg \cos \alpha$$

Teniendo en cuenta que para ángulos pequeños el valor de la tangente y el valor del seno son prácticamente iguales,

$$\text{sen } \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx 0{,}07$$

$$F = 2.000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}07 + 0{,}1 \cdot 2.000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}9975$$

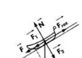
$$F = 3327{,}1 \text{ N}$$

En este caso también se cumple que

$$P = Fv$$

$$P = 3327{,}1 \text{ N} \cdot 15 \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{49.906 \text{ W}}$$



c) En este tercer caso las fuerzas que actúan son las representadas en este esquema.

Se cumple

$$F + F_1 - F_{roz} = F + mg \text{ sen } \alpha - \mu mg \cos \alpha = m \cdot a$$

y como

$$m \cdot a = 0$$

$$F = \mu mg \cos \alpha - mg \text{ sen } \alpha$$

$$F = 0{,}1 \cdot 2.000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}9975 - 2.000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}07$$

$$F = 583{,}1 \text{ N}$$

y de nuevo

$$\boldsymbol{P} = F \cdot v = 583{,}1 \text{ N} \cdot 15 \text{ m/s} = \mathbf{8746,\ 5\ W}$$

10. Un motor diesel de 150 HP está acoplado a una grúa, que eleva un cuerpo de 2.000 kg con una velocidad constante de 2 m/s. Calcular el rendimiento con que trabaja el motor y el número de calorías que deberán extraerse del motor por cada hora de funcionamiento.

(1 HP = 746 W.)

Resolución

En este caso

$$150 \text{ HP} \frac{746 \text{ W}}{1 \text{ HP}} = 111.900 \text{ W}$$

La potencia útil de la grúa será

$$P = Fv = (mg)\ v = 2.000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m/s} = 39.200 \text{ W}$$

El rendimiento de la máquina, definido como

$$\textbf{Rto.} = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{total}}} = \frac{39.200 \text{ W}}{111.900 \text{ W}} = \mathbf{0{,}35}$$

Calculemos ahora el trabajo perdido para poder hallar la energía que debe extraerse por cada hora de funcionamiento.

$$W_{\text{perd}} = P_{\text{perd}} \cdot t = (1{,}00 - 0{,}35)\ P_t \cdot t = 0{,}65 \cdot 111.900 \text{ W}.\ 3600 \text{ s}$$

$$W_{\text{perd}} = 2{,}61 \cdot 10^8 \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ cal}}{4{,}18 \text{ J}} = \mathbf{6{,}26 \cdot 10^7\ cal}$$

W_{perdido} = **Número de calorías que deben extraerse**

11. Una piedra de 3 kg de masa está atada al extremo de una cuerda de 0,6 m y gira en un plano vertical, con velocidad de 4 r.p.s. Calcular:

a) La energía cinética de la piedra en cualquier instante.

b) El valor de la fuerza centrípeta sobre la cuerda.

c) El trabajo realizado por la fuerza centrípeta al dar una vuelta.

Resolución

Calculemos en primer lugar la velocidad angular ω, y la velocidad lineal v de la piedra:

$$\omega = \frac{4 \text{ rev}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} = 8\pi \text{ rad/s}$$

$$v = \omega \cdot R = 8\pi \text{ rad/s} \cdot 0{,}6 \text{ m} = 4{,}8\pi \text{ m/s}$$

a) La energía cinética de la piedra valdrá

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} 3 \text{ kg} \cdot (4{,}8\pi \text{ m/s})^2 = \mathbf{341\ J}$$

b) La fuerza normal o centrípeta vale en cada instante

$$F_n = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R = 3 \text{ kg} \cdot (8\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}6 \text{ m}$$

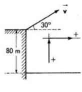
$$\mathbf{F_n = 1.136{,}9\ N}$$

c) El trabajo realizado por la fuerza centrípeta es nulo, ya que la fuerza es siempre perpendicular al desplazamiento y, por tanto, el producto escalar es nulo.

$$W = \int \vec{F}\,\vec{dr} = 0$$

12. Desde lo alto de un acantilado de 80 m de altura, se dispara un cañón con un ángulo de 30° sobre la horizontal, saliendo la bala a 216 km/h. Calcular el valor del módulo del vector velocidad cuando el proyectil llega al mar. Realizar el cálculo por consideraciones energéticas, despreciando el rozamiento con el aire.

Resolución



Hagamos un esquema para ver el sentido asignado a los vectores y los signos correspondientes.

Convertimos las unidades al SI

$$216\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1.000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3.600\ \text{s}} = 60\ \text{m/s}$$

Si aplicamos el teorema de conservación de la energía, entre el instante del disparo y el de contacto con el agua tendremos

$$W_{\text{n c}} = \Delta E_c + \Delta E_p \qquad (1)$$

El $W_{\text{n c}}$ (trabajo no conservativo) es nulo, pues en este caso la única fuerza que actúa es el peso, ya que no hay rozamiento y el peso es una fuerza conservativa. La variación de la energía cinética valdrá

$$E_c = \left(\frac{1}{2}\right) m \cdot v_f^2 - \left(\frac{1}{2}\right) m \cdot v_o^2$$

en donde

$$v_f = \text{velocidad en el instante de llegada}$$

y

$$v_o = \text{velocidad de salida del proyectil}$$

En cuanto a la variación de la E_p,

$$E_p = E_{\text{p f}} - E_{\text{p o}} = mg\,(-h) - 0 = -mgh$$

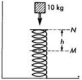
tomamos como nivel de referencia el de la posición de salida, el punto de impacto está situado en $-h$, de acuerdo con el convenio de signos, y $h_o = 0$. Llevando estos valores hallados a la ecuación (1)

$$0 = \left(\frac{1}{2}\right) mv_f^2 - \left(\frac{1}{2}\right) mv_o^2 - mgh$$

simplificando y despejando v_f,

$$v_f = \sqrt{v_o^2 + 2gh} = \sqrt{(60\ \text{m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 80\ \text{m}}$$

$$\mathbf{v_f = 71{,}88\ m/s}$$



13. Dejamos caer un cuerpo de 10 kg desde una altura de 4 m sobre un muelle de constante de restitución $k = 600$ N/m, como indica la figura. Calcular la longitud que se comprime el muelle.

Resolución

Hagamos un balance de energías tomando como nivel de referencia de energías potenciales el que pasa por el punto de máxima compresión del muelle M, y para las energías elásticas del muelle, el que pasa por el punto de equilibrio del muelle N.

Tengamos en cuenta que el cuerpo al caer pierde energía potencial gravitatoria, adquiere energía cinética y ésta la transforma en trabajo de compresión del muelle y queda acumulada como energía potencial elástica del muelle (de lo que deducimos que $\Delta E_c = 0$). Tengamos en cuenta además que en todo el recorrido no hay trabajo no conservativo, ya que no hay rozamientos ($W_{nc} = 0$) y, por tanto, se cumple que

$$\mathbf{\Delta E_{p\ gravitatoria} = \Delta E_{p\ elástica} = -W_{compres.\ muelle}}$$

$$\Delta E_{p\,g} = mg\,(4 + h) - mg\,(0)$$

$$\Delta E_{p\,e} = \frac{1}{2}\,kx_M^2 - \frac{1}{2}\,kx_N^2$$

por tanto,

$$m \cdot g\,(4 + h) = \frac{1}{2}\,kx_M^2 - \frac{1}{2}\,k\,x_N^2$$

$$10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2\,(4\ m + h) = \frac{1}{2}\,600\ \text{N/m} \cdot h^2 - (0)$$

y resolviendo la ecuación,

$$h = 1{,}31 \text{ m}$$

14. Una bola de cristal de 20 g choca contra el parqué de una habitación al caer desde una altura de 0,816 m. Si el coeficiente de restitución en el choque de la bola es de 0,75, calcular la altura que alcanzará la bola después del choque y la energía potencial máxima que adquiere después del choque.

Resolución

Para calcular la velocidad de impacto, hagamos un balance de energías en la caída hasta el momento en que choca la bola contra el suelo: Al no haber rozamiento con el aire

$$W_{\text{n c}} = 0$$

y, por tanto,

$$0 = \Delta E_p + \Delta E_c \tag{1}$$

Calculemos ΔE_p y ΔE_c; para hallar el valor de ΔE_p, tomemos como plano de referencia de energías potenciales el del suelo:

$$\Delta E_p = mgh_B - mgh_A = -mgh_A$$

ΔE_c valdrá

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\, mv_B - \frac{1}{2}\, mv_A^2 = \frac{1}{2}\, mv_B^2$$

llevando los valores obtenidos a la ecuación (1) tenemos

$$0 = -mgh_A + \frac{1}{2}\, mv_B^2$$

simplificando y despejando v_B,

$$v_B = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}816 \text{ m}} = 4 \text{ m/s}$$

Si ahora tenemos en cuenta que la velocidad del suelo es nula antes y después del choque, el coeficiente de restitución adopta la forma

$$K = -\frac{v_{\text{después del choque}}}{v_{\text{antes del choque}}} = -\frac{v'}{v_A}$$

$$0{,}75 = -\frac{v'}{4 \text{ m/s}}$$

$$v' = -3 \text{ m/s}$$

Al subir la bola hacia arriba se cumple de nuevo que

$$W_{nc} = 0$$

y en esta ocasión,

$$\Delta E_p = m\,g\,h_c - m\,g\,h_B = m\,g\,h_c$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\,mv_c^2 - \frac{1}{2}\,mv'^2 = -\frac{1}{2}\,mv'^2$$

y aplicando la ecuación (1) tenemos

$$mgh_c = -\frac{1}{2}\,mv'^2$$

simplificando y despejando h_c,

$$h_c = \frac{v'^2}{2g} = \frac{(-3 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 0{,}459 \text{ m}$$

En cuanto a la energía potencial máxima después del choque, será

$$E_p = mgh_c = 0{,}020 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \cdot 0{,}459 \text{ m} = 8{,}99 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

15. Un proyectil de 400 kg explota dividiéndose en tres fragmentos cuando está en el aire a una velocidad

$$\vec{v} = 30\,\vec{i} + 40\,\vec{j}$$

Si dos de los fragmentos tienen igual masa y salen: el primero, paralelo al eje OX, con velocidad de 10 m/s, y el segundo, paralelo al eje OY, con velocidad de 20 m/s, calcular la velocidad del tercer fragmento, de masa doble que la de cualquiera de los otros dos, y comprobar si en el instante de la explosión se cumple el principio de conservación de la energía. ¿Qué ha sucedido?

Resolución

Las masas de los fragmentos son

$$m + m + 2\,m = 400 \text{ kg} \Rightarrow m = 100 \text{ kg} \quad \text{y} \quad 2\,m = 200 \text{ kg}$$

y el módulo de la velocidad del proyectil en el momento de la explosión es

$$|\vec{v}| = \sqrt{30^2 + 40^2} \text{ m/s} = 50 \text{ m/s}.$$

Ocurre que, al no existir fuerzas exteriores, la cantidad de movimiento debe permanecer constante; por tanto,

$$\vec{p}_{\text{antes de la explosión}} = \vec{p}_{\text{después de la explosión}}$$

Tomando el origen de los ejes X e Y en el punto de la explosión,

$$400 \cdot (30\vec{i} + 40\vec{j}) = 100 \cdot (10\vec{i}) + 100 \cdot (10\vec{j}) + 200 \cdot \vec{v'} \quad \text{(SI)}$$

$$12.000\vec{i} + 16.000\vec{j} = 1.000\vec{i} + 2.000\vec{j} + 200 \cdot \vec{v'} \quad \text{(SI)}$$

$$\vec{v'} = 55\vec{i} + 70\vec{j} \quad \text{(SI)}$$

$$|\vec{v'}| = \mathbf{89{,}02 \text{ m/s}}$$

Veamos si se cumple el principio de conservación de la energía. Para ello, calcularemos la energía cinética de los fragmentos antes y después de la explosión, ya que consideramos que la energía potencial gravitatoria en el instante de la explosión es la misma antes que después.

$$E_{\text{antes}} = \left(\frac{1}{2}\right) 400 \text{ kg} \cdot 50^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 500.000 \text{ J}$$

$$E_{\text{después}} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 100 \cdot 10^2 \text{ J} + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 100 \cdot 20^2 \text{ J} + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 200 \cdot 89{,}02^2 \text{ J}$$

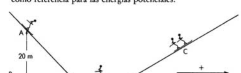
$$E_{\text{después}} = 792.456 \text{ J}$$

Lógicamente no se cumple el principio de conservación de la energía mecánica, porque los fragmentos aprovechan la energía de la explosión, que puede tener un valor que no depende de las condiciones del movimiento ni de las condiciones descritas en el enunciado.

16. Un esquiador de 70 kg de masa, con un equipo de 5 kg, desciende por una colina. Al llegar al plano horizontal choca con otro esquiador situado en el punto *B*, de 60 kg de masa (incluido su equipo), y juntos ascienden por un terraplén hasta pararse. Si el primer esquiador desciende sin rozamiento apreciable desde un desnivel de 20 m de altura, ¿qué altura alcanzarán después del choque en la otra colina, suponiendo nulos de nuevo los rozamientos y que el choque puede considerarse perfectamente inelástico?

Resolución

Hagamos un esquema de situación y tomemos el plano *P* como referencia para las energías potenciales.



Al hacer un balance energético y considerando que los rozamientos en la caída desde *A* hasta *B* son nulos, podemos concluir que $W_{nc} = 0$.

$$W_{nc} = \Delta E_p + \Delta E_c = 0 \qquad (1)$$

El primer esquiador al llegar a *B* llevará una velocidad que calcularemos aplicando este principio (1):

$$\Delta E_p = mgh_B - mgh_A = -mgh_A$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\, mv_B^2 - \frac{1}{2}\, mv_A^2 = \frac{1}{2}\, mv_B^2$$

$$0 = -mgh_A + \frac{1}{2}\, mv_B^2$$

sustituyendo y despejando v_B,

$$v_B = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 20\ \text{m}} = 19{,}8\ \text{m/s}.$$

En el momento del impacto y por producirse un choque perfectamente inelástico, habrá un acoplamiento y saldrán juntos los dos móviles. En el choque la cantidad de movimiento debe permanecer constante, pues no hay fuerzas exteriores y, por tanto,

$$\vec{p}_{\text{antes}} = \vec{p}_{\text{después}}$$

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)\, v$$

$$75 \cdot 19{,}8\ \text{kg} \cdot \text{m/s} = (75 + 60)\, v$$

$$v = 11\ \text{m/s}$$

y como la velocidad resulta positiva, tiene el sentido que hemos asignado al eje positivo, tal como indicamos en el esquema.

Después del acoplamiento los cuerpos se desplazan juntos y como sigue sin haber rozamientos, de nuevo

$$W_{nc} = 0 = \Delta E_p + E_c \qquad (2)$$

y en este caso

$$\Delta E_p = m_T g h_c - m_T g h_B = m_T g h_c$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\, m_T v_c^2 - \frac{1}{2}\, m_T v_B^2 = -\frac{1}{2}\, m_T v_B^2$$

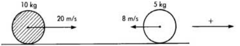
y aplicando (2)

$$m_T g h_c + \left(-\frac{1}{2}\, m_T v_B^2\right) = 0$$

simplificando ahora y despejando h_c,

$$\mathbf{h_c} = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{(11\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}} = \mathbf{6{,}17\ m}$$

17. Dos masas, una de 10 kg y otra de 5 kg, se mueven en la misma dirección y en sentidos opuestos con velocidades respectivas de 20 y de 8 m/s. Calcular las velocidades después del choque en el supuesto de que éste sea perfectamente elástico.



Resolución

Hagamos un esquema y tomemos arbitrariamente un sentido como positivo para los vectores.

Como el choque es perfectamente elástico, se cumplen el principio de conservación de la cantidad de movimiento y el principio de conservación de la energía mecánica, y así,

$$\Sigma \vec{p}_{\text{antes}} = \Sigma \vec{p}_{\text{después}}$$

$$10 \cdot (20)\ \mathrm{kg\ m/s} + 5 \cdot (-8)\ \mathrm{kg\ m/s} = 10\ \mathrm{kg} \cdot v'_1 + 5\ \mathrm{kg} \cdot v' \quad (1)$$

y en lo que a la energía se refiere, como las respectivas energías potenciales son constantes,

$$\left(\frac{1}{2}\right)10 \cdot 20^2 + \left(\frac{1}{2}\right)5 \cdot 8^2 = \left(\frac{1}{2}\right)10 \cdot v_1'^2 + \left(\frac{1}{2}\right)5 \cdot v_2'^2 \quad (2)$$

ecuación que podemos sustituir por

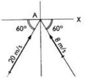
$$20 + v_1' = -8 + v_2' \tag{3}$$

siempre que el choque sea perfectamente elástico (ya que la ecuación (3) es una combinación lineal de las otras, que se deduce trasladando términos y dividiendo ordenadamente la ecuación (2) por la ecuación (1)). Resolviendo, por último, el sistema formado por las ecuaciones (1) y (3) llegamos a

$$\mathbf{v_1' = 1{,}33\ m/s}$$

$$\mathbf{v_2' = 10{,}66\ m/s}$$

que al resultar positivas nos indican que ambas masas se desplazan hacia la derecha después del choque.



18. Dos bolas de 10 kg y 5 kg de masa se mueven con velocidades respectivas de 20 m/s y 8 m/s. Se supone que chocan de forma perfectamente inelástica en el punto *A*, de acuerdo con la dirección indicada en la figura. Calcular las velocidades de las bolas después del choque.

Resolución

En el caso de producirse el choque perfectamente inelástico, las dos bolas salen juntas y las velocidades serán iguales. Se seguirá cumpliendo el principio de la conservación de la cantidad de movimiento, pero deja de cumplirse el principio de conservación de la energía mecánica. Por consiguiente,

$$\Sigma\vec{p}_{\text{antes}} = \Sigma\vec{p}_{\text{después}}$$

$$\Sigma\vec{p}_{\text{an}} = 10(20 \cos 60°\ \vec{i} + 20 \text{ sen } 60°\ \vec{j}) +$$

$$+ 5(-8 \cos 60°\ \vec{i} + 8 \text{ sen } 60°\ \vec{j})$$

$$\Sigma\vec{p}_{\text{des}} = 15\ (v_x\ \vec{i} + v_y\ \vec{j})$$

Si hacemos operaciones,

$$80\vec{i} + 207{,}8\vec{j} = 15\ v_x\vec{i} + 15\ v_y\vec{j}$$

y las componentes de la velocidad final que adquieren las bolas son

$$v_x = 5{,}33 \text{ m/s}$$

$$v_y = 13{,}85 \text{ m/s}$$

Como respecto al eje de las X, la velocidad forma un ángulo α tal que

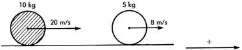
$$\text{tg } \alpha = \frac{13{,}85}{5{,}33} = 2{,}6$$

$$\alpha = 68° \ 57' \ 21''$$

De este modo tendremos perfectamente definido el vector velocidad solicitado.

19. Dos bolas de 10 kg y 5 kg de masa llevan velocidades respectivas de 20 m/s y 8 m/s, van en la misma dirección y en el mismo sentido, alcanzando la más rápida a la más lenta y produciéndose un choque perfectamente elástico. ¿Qué velocidades toman las bolas después del choque?

Resolución



De una parte, se conserva la cantidad de movimiento antes y después del choque:

$$10 \cdot 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s} + 5 \cdot 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (10v_1' + 5v_2') \text{ kg}$$

$$(240 + 40) \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (10v_1' + 5v_2) \text{ kg}$$

Simplificando

$$48 \text{ m/s} = 2\, v_1' + v_2' \qquad (1)$$

y como simultáneamente se cumple el principio de conservación de la energía mecánica, podemos aplicar la ecuación

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

$$20 \text{ m/s} + v_1' = 8 \text{ m/s} = v_2'$$

$$v_1' - v_2' = -12 \text{ m/s}$$

que junto a la ecuación (1) proporciona el sistema que, resuelto, conduce a

$$\mathbf{v_1' = 12 \text{ m/s}}$$

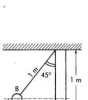
$$\mathbf{v_2' = 24 \text{ m/s}}$$

velocidades que, al resultar positivas, tienen el sentido asignado por convenio, es decir, hacia la derecha.

20. Dos esferas de 2 kg y 1 kg están suspendidas de dos hilos paralelos inextensibles y sin peso de 1 m de longitud cada uno. Se aplica una fuerza sobre la primera esfera que la hace desviarse hasta formar un ángulo de 45° con la vertical, manteniendo el hilo tenso, y después se suelta. Al caer choca con la otra bola. Hallar la altura que alcanzará cada bola después del choque en los casos:

a) Choque perfectamente elástico.

b) Choque perfectamente inelástico.



Resolución

Hagamos un esquema del problema. Calculemos

$$h = 1 - 1 \cos 45°$$
$$h = 0{,}2928 \text{ m}$$

Hallaremos en primer lugar la velocidad de la bola que desciende, en el momento del impacto, teniendo en cuenta que no actúan fuerzas no conservativas en el descenso de la bola,

$$W_{nc} = \Delta E_p + \Delta E_c = 0$$

es decir, en la caída no hay pérdidas de energía mecánica. Podemos calcular, pues, la velocidad de la bola que desciende en el momento del impacto:

$$\Delta E_p = mgh_A - mgh_B = -mgh_B$$

$$\Delta E_c = \left(\frac{1}{2}\right) mv_A^2 - \left(\frac{1}{2}\right) mv_B^2 = \left(\frac{1}{2}\right) mv_A^2$$

$$-mgh_B + \left(\frac{1}{2}\right) mv_A^2 = 0$$

simplificando y despejando v_A,

$$v_A = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot \text{m/s}^2 \cdot 0{,}2928 \text{ m}} = 2{,}39 \text{ m/s}$$

a) Si se produce el choque elástico,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m^2v^{2'}$$

es decir,

$$2 \cdot 2{,}39 \text{ kg} \cdot \text{m/s} + 1 \cdot 0 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 2 \cdot v_1' \text{ kg} + 1 \cdot v_2' \text{ kg}$$

y también

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

es decir,

$$v_1' + 2{,}39 \text{ m/s} = 0 \text{ m/s} + v_2'$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos

$$\mathbf{v_1' = 0{,}796 \text{ m/s}}$$

$$\mathbf{v_2' = 3{,}18 \text{ m/s}}$$

y con estas velocidades podemos calcular la altura que alcanza cada una de las bolas después del choque, teniendo en cuenta que toda la energía cinética la convierten de nuevo en potencial, según

$$\left(\frac{1}{2}\right) mv^2 = mgh$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

de donde se deduce

$$\boldsymbol{h_1} = \frac{0{,}796^2}{2 \cdot 9{,}8}\ \mathrm{m} = \mathbf{0{,}032\ m}$$

$$\boldsymbol{h_2} = \frac{3{,}18^2}{2 \cdot 9{,}8}\ \mathrm{m} = \mathbf{0{,}515\ m}$$

b) En el caso de un choque perfectamente inelástico, después del choque las bolas salen juntas. Se sigue conservando la cantidad de movimiento en el choque,

$$2 \cdot 2{,}39\ \mathrm{kg \cdot m/s} = (2 + 1)\ \mathrm{kg} \cdot v$$

$$v = 1{,}53\ \mathrm{m/s}$$

y con esta velocidad las dos juntas ascienden una altura

$$\boldsymbol{h} = \frac{v^2}{2g} = \frac{(1{,}593\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}} = \mathbf{0{,}13\ m}$$

Ejercicios propuestos

1. Situamos un bloque de 20 kg de masa en la parte inferior de un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal y se lanza el bloque para que ascienda una altura de 20 m hasta que se para. En el supuesto de que el coeficiente de rozamiento sea 0,2:

a) Calcular cuál es la velocidad necesaria al inicio del plano para alcanzar esta altura.

b) Calcular el incremento de la energía potencial y la pérdida de energía cinética.

c) ¿Deja de cumplirse en este caso, con los valores obtenidos, el principio de conservación de la energía? ¿Por qué?

Solución

a) $\mathbf{v_o = 22{,}97\ m/s}$; *b*) $\mathbf{E_p = 3.920\ J}$; $\mathbf{\Delta E_c = -5.276{,}2\ J}$; *c*) **No. Hay pérdida de energía en rozamientos.**

2. Un automóvil marcha en línea recta a 100 km/h y frena fuerte, de forma que quedan agarrotadas las cuatro ruedas. ¿Qué distancia recorre hasta pararse si el coeficiente de rozamiento en la frenada es de 0,8?

Solución

a) $\mathbf{\Delta r = 49{,}2\ m}$.

3. Un cuerpo de 5 kg de masa, inicialmente en reposo, es arrastrado 10 m hacia arriba por un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal, por acción de una fuerza de 50 N que forma un ángulo de 45° con la superficie del plano y está dirigida hacia la zona alta del plano. Si el coeficiente de rozamiento es de 0,2, calcular:

a) Trabajo realizado por la fuerza aplicada.

b) Variaciones de la energía cinética y potencial que sufre el cuerpo en su desplazamiento, así como las pérdidas de trabajo en rozamientos.

Solución

a) $W = 353{,}5$ J; *b*) $\Delta E_c = 94{,}4$ J; $\Delta E_p = 245$ J; $W_{roz} = -14{,}1$ J.

4. Queremos elevar, con velocidad constante, hasta un noveno piso situado a 25 m de altura, un ascensor de 3.500 kg, debiendo vencer además una fuerza de rozamiento constante de 60 N. Calcular:

a) Trabajo realizado por la fuerza peso.

b) Trabajo útil y trabajo perdido en rozamiento.

c) Potencia que necesita la máquina suponiendo que el ascensor asciende a una velocidad constante de 4 m/s.

Solución

a) $W_{peso} = -857500$ J; *b*) $W_{útil} = 859000$ J; $W_{roz} = -1500$ J; *c*) $P = 137440$ W.

5. Una masa de 4 kg se desplaza sobre una mesa horizontal sin rozamiento a la velocidad de 3 m/s y choca con un parachoques. El parachoques ejerce una fuerza constante de 100 N sobre la masa, tanto en el proceso de compresión como en el de expansión posterior, hasta recuperar la posición inicial.

a) ¿Cuánto vale la energía cinética al iniciarse el choque?

b) ¿Qué longitud se comprime el parachoques?

c) ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando el parachoques se ha comprimido 10 cm?

Solución

a) $E_c = 18$ J; *b*) $\Delta r = 0{,}18$ m; *c*) $v = 2$ m/s.

6. Una masa de 2 kg se desplaza sometida a una fuerza variable del tipo

$$\vec{F} = 3y^2\vec{i} + (2x^2 + 1)\,\vec{j}$$

Calcular el trabajo realizado al trasladar el cuerpo a lo largo de la recta $x + 2y = 0$, entre los puntos M (0,0) y N (2, −1).

Solución

$\mathbf{W = -1{,}66\ J}$

7. Un dispositivo antiaéreo dispara con un cañón de 2,5 m proyectiles de 1 kg, que impulsa lo largo del tubo con una fuerza, en función del camino recorrido, de valor

$$F = 50000 - 100x \text{ (en unidades del SI)}$$

Calcular:

a) Trabajo realizado por el proyectil, bajo la acción de la fuerza en el interior del cañón, suponiendo nulos los rozamientos.

b) Velocidad de salida del proyectil.

c) Altura alcanzada por el proyectil, en el supuesto de que el disparo sea vertical.

Solución

a) **W = 124.687 J**; *b*) **v = 499,3 m/s**; *c*) **h = 12.723 m.**

8. La Tierra atrae un asteroide con una fuerza del tipo

$$F = -\,G\,\frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Calcular el trabajo que se ha de realizar para trasladar el asteroide desde una altura de 10.000 km hasta la superficie terrestre, supuesto, a efectos de la creación del campo, que la Tierra tiene concentrada la masa en su centro y, por tanto, se considera una masa puntual.

(Suponer que $G \cdot M_T \cdot m$ = constante = 10^{18} N · m²; R_T = 6.370 km.)

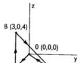
Solución

$W = -9{,}59 \cdot 10^{10}$ J.

9. Un cuerpo que se está moviendo en el eje OX es atraído hacia el origen con una fuerza del tipo $F = -6x^3$ (estando F en N y x en m). ¿Qué trabajo se necesita para mover el cuerpo desde el punto M (1,0) al N (2,0)?

Solución

$W = -22{,}5$ J.



10. Calcular el trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{F} = 2x^2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 6z\,\vec{k}$$

a lo largo de la trayectoria $OABCO$.

Solución

$W_{OA} = 18$ J; $W_{AB} = 48$ J; $W_{BC} = -33$ J; $W_{CO} = -33$ J; $W_{total} = 0$.

11. Un motor de 60 CV eleva una masa de 6.000 kg a 20 m de altura en 30 s. Determinar la potencia desarrollada y hallar el rendimiento del motor.

Solución

P = 39 200 W; Rto. motor = 0,88.

12. Se desea extraer 200 m^3 de agua por minuto de un pozo en el que el agua está situada a 50 m por debajo del nivel del suelo. ¿Cuántos CV debe tener el motor si se supone un rendimiento del 25 por 100?

Solución

$\mathbf{P_{total} = 8888{,}8\ CV.}$

13. El motor de un automóvil de competición que tiene un peso de 1.640 kp es capaz de recorrer, partiendo del reposo, los 100 primeros metros en 5 s. En el supuesto de que la aceleración haya sido constante, calcular la potencia desarrollada por el motor si trabaja con un 64 por 100 de rendimiento práctico.

Solución

$\mathbf{P = 357{,}8\ CV.}$

14. Una masa de 20 kg se desliza por un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal. Cuando se ha desplazado una distancia de 10 m, choca con un muelle de constante de restitución $K = 100$ N/m. Si el coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano es de 0,2, hallar:

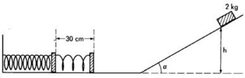
a) Velocidad en el momento del impacto.

b) Compresión máxima del muelle.

Solución

a) $\mathbf{v = 8\ m/s}$; *b*) $\mathbf{x = 4{,}68\ m.}$

15. Un muelle de constante $K = 400$ N/m está situado como indica la figura. Se comprime el muelle 30 cm y de esta forma, al soltarlo, el cuerpo de 2 kg es disparado. En el supuesto de que no exista rozamiento al deslizamiento, calcular la altura respecto al plano de salida, que asciende el cuerpo por el plano indicado.



Solución

$h_f = 0{,}918$ m.

16. Un cuerpo de 2 kg de masa está sujeto en el extremo de una cuerda de 1 m de longitud y está girando en un plano vertical, de forma que cuando pasa por el punto más bajo a ras del suelo la tensión que soporta la cuerda es de 100 N y en el punto más alto la tensión es nula. Calcular:

a) Su energía cinética máxima y mínima en la trayectoria que describe.

b) La energía de la masa en cualquier instante, suponiendo nulas las pérdidas por rozamientos.

Solución

a) $E_{c\,máx} = 40{,}2$ J; $E_{c\,min} = 9{,}8$ J; *b*) $E_{mecánica} = 40{,}2$ J.

17. Un bloque de 2 kg se desliza por un plano inclinado 60° con respecto a la horizontal, con coeficiente de rozamiento 0,15. Al llegar al final del plano debe rizar el rizo sin rozamiento de la figura, situado en el mismo plano vertical que la trayectoria de descenso, de 2 m de radio. ¿Desde qué altura mínima debe caer para completar el rizo?.

Solución

$h_{mín} = 5{,}88$ **m.**

18. En un proceso nuclear se ha conseguido convertir en energía la masa de 10^{-6} g de uranio y esta energía se ha utilizado para proporcionar impulso a un cohete de 1 Tm de masa. Si puede aprovechar el 100 por 100 de la energía, ¿a qué altura podría ascender?

(Velocidad de la luz: $3 \cdot 10^8$ m/s.)

Solución

$h = 9.183$ **m.**

19. Una masa de 100 g cae partiendo del reposo desde una altura de 100 m, rebota y sube hasta una altura de 60 m. ¿Qué energía se ha perdido en el impacto?

Solución

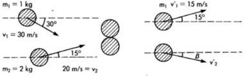
$E_{perdida} = -39{,}2$ **J.**

20. Una bola de billar de 200 g de masa (m_1) tiene una velocidad $\vec{v_1} = (4\vec{i} + 3\vec{j})$, y choca con otra bola m_2 de 300 g de masa, que se mueve con una velocidad $\vec{v_2} = 3\vec{j}$. Si sabemos que una vez producida la colisión elástica la bola de masa m_1 lleva una velocidad $\vec{v'_1} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, ¿con qué velocidad se moverá la otra bola, de masa m_2, después del choque?

Solución

$$\vec{v'_2} = \left(\frac{4}{3}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{j}.$$

21. Dos bolas de $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 2$ kg que tienen las velocidades v_1 y v_2, que se indican en la figura, chocan, y después del choque la masa m_1 sale con la velocidad de 15 m/s, en la dirección y sentido indicados.



a) Calcular v'_2.

b) Deducir si el choque es perfectamente elástico.

Solución

a) $\vec{v'_2} = 25{,}06\,\vec{i} - 4{,}26\,\vec{j}$; *b*) **No es elástico, ya que no se conserva la energía cinética.**

22. En un sistema formado por tres partículas de la misma masa se produce un choque simultáneo, resultando al final una partícula única. En el supuesto de que las partículas se muevan con velocidades respectivas

$$\vec{v_1} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{v_2} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{v_3} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

calcular la velocidad del sistema resultante.

Solución

$$\vec{v} = \left(\frac{4}{3}\right)\vec{i} + \vec{j}.$$

23. Dos bolas de masas $m_1 = 5$ kg y $m_2 = 15$ kg se mueven en la misma dirección con velocidades respectivas en módulo de

$v_1 = 10$ cm/s y $v_2 = 5$ cm/s. Calcular las velocidades después del choque:

a) En el caso de tener sus velocidades de sentidos opuestos y ser el choque perfectamente elástico.

b) En el caso de que la bola más rápida alcance a la otra, al desplazarse las dos en el mismo sentido y siendo el choque de nuevo perfectamente elástico.

c) En el primer caso, si el choque fuese perfectamente inelástico.

Solución

a) **$v'_1 = -12{,}5$ cm/s; $v'_2 = 2{,}5$ cm/s;** *b*) **$v'_1 = 2{,}5$ cm/s; v'_2 7,5 cm/s;** *c*) **$v = -1{,}25$ cm/s.**

Esta colección tiene como objetivo presentar material que, a la vez que valioso pedagógicamen sirva de excelente guía práctica para preparar temas de COU y Selectividad, tanto en el aspe de conocimientos como en lo referente a ejercic prácticos. Por ello, la colección está concebida forma de cuadernos, para que cada profesor o alu no trabaje aquellos temas que considere más a cuados a sus intereses.

Cada cuaderno ofrece la siguiente estructura:

- *Recordatorio de puntos fundamentales.*
- *Cuestiones de autoevaluación.*
- *Ejercicios resueltos.*
- *Ejercicios propuestos, con su solución.*

Cuadernos de COU y **Selectividad**

FISICA

ÍNDICE DE TÍTULOS

1. Cálculos con vectores.
2. Cinemática.
3. Dinámica.
4. Ondas.
5. Trabajo y energía.
6. Campos gravitatorio y electrostático.
7. Corriente alterna.
8. Termodinámica.

ISBN 84-205-2126-4
9 788420 521268 00000

Alhambra Longman